Théorème de Brouwer (n quelconque)

Leçons : 203, 204, 214, 215

Réf. : Gonnord, Tosel, Calcul différentiel p 64

Th. du point fixe de Brouwer :

Soit $n \geq 1$. On pose $B = B(0,1)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Alors toute application $f : B \to B$ continue admet un point fixe.

Démonstration : Par l'absurde, on suppose qu'il existe $f : B \to B$ continue n'admettant aucun point fixe.

1) Étape 1 : se ramener à f $\mathcal{C}^1$

- $x \mapsto f(x) - x$ est continue sur B compacte et ne s'annule jamais donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in B$, $\|f(x) - x\| > \varepsilon$, où $\| \ \|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
- Par le th. de Weierstrass, il existe $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ à coordonnées polynômiales tel que $\|f - P\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall x \in B$, $\|P(x)\| \leq \|P(x) - f(x)\| + \|f(x)\|$

$$\|P(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1$$

Soit $\boxed{Q = \frac{1}{1+\varepsilon/2} P}$.

Alors Q est $\mathcal{C}^1$, $Q(B) \subset B$ et pour tout $x \in B$

$$\begin{aligned}
\|Q(x) - f(x)\| &\leq \|Q(x) - P(x)\| + \|P(x) - f(x)\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\|Q(x)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

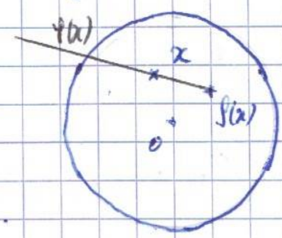
et $\|Q(x) - x\| \geq \underbrace{\|f(x) - x\|}_{> \varepsilon} - \underbrace{\|Q(x) - f(x)\|}_{\leq \varepsilon} > 0$

donc Q n'admet pas de point fixe.

2) <u>Etape 2</u> : Montrer l'existence d'une rétraction $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1} = S$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq $\varphi_{|S} = id_{|S}$

Soit $S = \mathbb{S}_{n-1}$. On cherche $\varphi : B \longrightarrow S$ sous la forme

$$\begin{cases} \varphi(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x)) & \text{où } \lambda(x) > 0 \\ \|\varphi(x)\| = 1 \end{cases}$$



$\varphi(x)$ est le point d'intersection de $[f(x), x)$ et S.

On a alors $\|f(x) + \lambda(x)(x - f(x))\|^2 - 1 = 0$

$$\underbrace{\|x - f(x)\|^2 \lambda(x) + 2 \langle f(x), x - f(x) \rangle \lambda(x) + \|f(x)\|^2 - 1 = 0}_{= R(\lambda(x)) \text{ poly. de degré 2 en } \lambda}$$

$R(0) = \|f(x)\|^2 - 1 \leq 0$ et $R(1) = \|x\|^2 - 1 \leq 0$

$\|x - f(x)\|^2 > 0$

donc R admet deux racines distinctes dont une ≥ 1, et on pose

$$\lambda(x) = \frac{-\langle f(x), x - f(x) \rangle + \sqrt{\Delta'(x)}}{\|x - f(x)\|^2}$$

où $\Delta'(x) = \langle f(x), x - f(x) \rangle^2 - \|x - f(x)\|^2 (\|f(x)\|^2 - 1) > 0$

Alors, $x \longmapsto \lambda(x)$ est $\mathcal{C}^1$ et φ est donc $\mathcal{C}^1$ sur B

On a $\varphi(x) \in S \ \forall x \in B$,

et si $x \in S$, $R(1) = 0$ donc $\lambda(x) = 1$ donc $\varphi(x) = x$

donc $\boxed{\varphi_{|S} = id_{|S}}$

<u>On pose alors</u>

- $\forall t \in [0,1]$: $\varphi_t : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & (1-t)x + t\varphi(x) \end{array}$

φ_t est $\mathcal{C}^1$ sur B, $\varphi_0 = id_{|B}$ et $\varphi_1 = \varphi$

- $P(t) = \int_{\overset{\circ}{B}} \underbrace{\det J_{\varphi_t}(x)}_{\substack{\text{fonction continue en } x \\ \text{car } \varphi_t \ \mathcal{C}^1}} \underbrace{dx}_{\text{mesure de Lebesgue}}$ qui est un polynôme en t

(A)

3) Etape 3 : Préparer la contradiction du raisonnement par l'absurde

Soit $x \in B$. $\|\varphi(x)\|^2 = 1$ → différentielle

donc pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $2 < \varphi(x), d\varphi(x)(h) > = 0$

donc $\mathrm{Im}(d\varphi(x)) \subset \underbrace{\varphi(x)}_{\neq 0 \text{ car } \in S}^{\perp}$

donc $rg(d\varphi(x)) \leq n-1$

donc $d\varphi(x)$ n'est pas injective

donc $\det J_{\varphi_1}(x) = \det J_\varphi(x) = 0$

donc $P(1) = 0$

On va montrer que P est constant non nul, d'où la contradiction

Pour cela, on va m.q.

- pour t petit $< \alpha$, φ_t est injective donc $\varphi_t(\mathring{B}) \subset \mathring{B}$ (car $\varphi_{|S} = id_{|S}$)
- pour t (encore plus) petit $< \beta$, $\varphi_t : \mathring{B} \to \varphi_t(\mathring{B})$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo. tq $\det J_{\varphi_t}(x) > 0$ $\forall x$
- $\varphi_t(\mathring{B}) = \mathring{B}$ par connexité, donc φ_t est en fait un $\mathcal{C}^1$-difféo global de $\mathring{B}$ sur $\mathring{B}$
- $P(t) = m(\mathring{B})$ par chgt de variable (où m : mes. de Lebesgue) pour $t \in [0, \beta[$, et donc P est constant > 0.

4) Etape 4 : M.q. φ_t est injective pour t petit

Soient $t \in [0,1]$, $x, y \in B$ tels que $\varphi_t(x) = \varphi_t(y)$

Alors, $(1-t)\|x-y\| = t\|\varphi(x) - \varphi(y)\|$

Or, φ est $\mathcal{C}^1$ donc le TAF sur B convexe compact nous donne

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq M\|x-y\| \text{ où } M = \sup_{z \in B} |||d\varphi(z)||| \geq 0$$

donc $\|x-y\| \leq \frac{tM}{1-t}\|x-y\|$

donc pour $0 \leq t < \alpha = \frac{1}{1+M} \leq 1$, $x = y$ et φ_t est injective

On, pour tout $x \in S$, $\varphi_t(x) = (1-t)x + tx = x$

donc $\varphi_t|_S = id_{|S}$ donc par injectivité de φ_t,

pour tout $t \in [0,\alpha[$, $\varphi_t(\mathring{B}) \subset \mathring{B}$

5) Etape 5: Th. d'inversion globale pour m.q. $\varphi_t : \mathring{B} \xrightarrow{\mathcal{C}^1\text{-difféo}} \varphi_t(\mathring{B})$

Soit $t \in [0,\alpha[$ et $x \in B$. les a_i sont continues en x car φ_t $\mathcal{C}^1$

On a $\det J_{\varphi_t}(x) = a_n(x)t^n + \dots + a_1^{(x)}t + 1$ car $\varphi_0 = id$ donc $J_{\varphi_0}(x) = I_n$

$= t\left(a_n^{(x)}t^{n-1} + \dots + a_1(x)\right) + 1$

Soit $0 \leq t < \beta = \min\left(\alpha, \frac{1}{m}\right)$ où $m = \sup\limits_{\substack{x \in B \\ t \in [0,1]}} \left|a_n(x)t^{n-1} + \dots + a_1(x)\right|$) $B \times [0,1]$ est compact

alors $\left|a_n(x)t^n + \dots + a_1(x)t\right| < 1$

donc $\det J_{\varphi_t}(x) > 0$ pour tout $x \in \mathring{B} \subset B$

φ_t étant injective pour $t < \beta \leq \alpha$, par théorème d'inversion globale

φ_t réalise un $\mathcal{C}^1$ - difféo. de $\mathring{B}$ sur $\varphi_t(\mathring{B}) \subset \mathring{B}$ et $\varphi_t(\mathring{B})$ est ouvert

6) Etape 6: M.q. $\varphi_t(\mathring{B}) = \mathring{B}$ pour $t < \beta$ par connexité.

On a vu que $\varphi_t(\mathring{B}) \subset \mathring{B}$, est non vide et est ouvert (dans $\mathbb{R}^n$ donc dans $\mathring{B}$) pour $t < \beta$

M.q. $\varphi_t(\mathring{B})$ est fermé dans $\mathring{B}$

Soit $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\varphi_t(\mathring{B})$ et $y \in \mathring{B}$ tq $y_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} y$

$\forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k \in \mathring{B} \mid y_k = \varphi_t(x_k)$

$(x_k)_k$ est une suite de $\mathring{B} \subset B$ compact, donc quitte à extraire

on peut supposer que $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x \in B$

et par continuité on a donc $\varphi_t(x_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \varphi(x)$

donc $\varphi_t(x) = y$.

A

Brouwer ③ V1

On : $\begin{cases} \varphi_{t|S} = id_{|S} \\ \varphi_t(x) = y \in \mathring{B} \end{cases}$

donc $x \in \mathring{B}$ et $y = \varphi_t(x) \in \varphi_t(\mathring{B})$

donc $\varphi_t(\mathring{B})$ est fermé dans $\mathring{B}$.

Enfin, $\mathring{B}$ est convexe donc connexe, donc $\boxed{\varphi_t(\mathring{B}) = \mathring{B}}$

$\boxed{\text{Pour } t < \beta,\ \varphi_t \text{ réalise donc un } \mathcal{C}^1\text{-difféo. de } \mathring{B} \text{ vers } \mathring{B}.}$

7) Dernière étape : Montrer que P est constant sur $[0, \beta[$

Pour $t < \beta$:

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_{\mathring{B}} \det J\varphi_t(x)\, dx \\ &= \int_{\mathring{B}} |\det J\varphi_t(x)|\, dx \\ &= \int_{\mathring{B}} dy \end{aligned}$$

$\det J\varphi_t(x) > 0$ d'ap. 5)

$f : \mathring{B} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto 1$ $\quad$ $(f = \mathbb{1}_{\mathring{B}})$

$\varphi : \mathring{B} \to \mathring{B}$, $x \mapsto y = \varphi_t(x)$

$$P(t) = m(\mathring{B}) > 0$$

P est donc un poly. constant > 0 sur $[0, \beta[$ donc constant sur $[0, 1]$.
Mais d'après 3) $P(1) = 0$ absurde

Donc $\boxed{f \text{ admet (au moins) un point fixe.}}$

Remarques

1) Le livre de Gonnord / Tosel est introuvable...

2) Le développement est **TRÈS** long et ne peut être fait dans sa totalité.
A partir du 3), on ne peut plus faire d'impasse, on peut donc

Étape 1 : s'arrêter à $Q = \frac{-1}{1+\varepsilon/2} P$ et dire qu'alors $\|Q(x) - x\| > 0$
Les résultats importants sur la compacité ont déjà été utilisés, le reste n'étant que des inégalités triangulaires.

Étape 2 : un dessin et l'écriture de $\begin{cases} \varphi(x) = f(x) + \lambda(x)(x - f(x)) \\ \|\varphi(x)\| = 1 \end{cases}$
est suffisant pour se convaincre de l'existence de $\lambda(x) > 0$.
En revanche il faut admettre que $x \mapsto \lambda(x)$ (donc φ) est $\mathcal{C}^1$, quitte à dire que tout repose sur le fait qu'on ait supposé $x - f(x) \neq 0$

3) La démonstration est difficile à suivre lorsqu'elle est faite rapidement, donc il vaut mieux ralentir le rythme :
→ à la fin de 2) lorsqu'on définit φ_t et ses 3 prop qui doivent ê claires
→ à la fin de 3) en disant à l'avance quelle va être la contradiction
→ avant 4), 5) et 6) en disant ce que l'on va exactement montrer dans cette étape.

4) Attention au raisonnement par connexité, $\varphi_t(\mathring{B})$ est fermé dans $\mathring{B}$ mais ouvert dans $\mathbb{R}^n$